Lezione simulata

Unità didattica di Analisi Matematica: “L’INTEGRALE DEFINITO”

Premessa

Questa unità didattica è proposta ai discenti per determinare le aree di figure delimitate da curve, per il calcolo di volumi, del lavoro di una forza, dello spazio percorso facendo sempre riferimento allo sviluppo storico che i problemi classici hanno incontrato nel corso dei secoli.

Sia nel campo scientifico che in quello tecnico si presentano spesso situazioni che per essere affrontate è necessario ricorrere al calcolo dell’***integrale definito***.

Vi sono infatti svariati problemi geometrici, meccanici, fisici in cui riveste un notevole significato la misura dell’area della superficie delimitata dal grafico di una funzione e dall’asse delle ascisse in un certo intervallo. Tale superficie viene detta “*trapezoide*” e la misura della sua area si ottiene utilizzando il calcolo di un integrale definito.

Dati identificativi

Destinatari: Si fa riferimento ad una situazione esemplificativa di una classe di 22 alunni iscritti alla terza classe di un liceo classico ad indirizzo PNI con una suddivisione dell’anno in quadrimestri.

Tempi: L’unità didattica sarà svolta durante le ore curricolari di matematica, informatica e fisica per un totale di circa 15 ore.

Docenti coinvolti: Matematica, Informatica, Fisica

Argomenti correlati: Calcolo della legge oraria in un moto, Lavoro di una forza, Energia di un condensatore, Energia di un campo magnetico.

Articolazione dell’apprendimento unitario

PeCuP (Profilo educativo Culturale e Professionale 2° Ciclo):

Strumenti culturali

- Acquisire gli strumenti formali, matematici o comunque logici…fondamentali e necessari per la comprensione delle discipline scientifiche e per poter operare nel campo delle scienze applicate;
- Conoscere criticamente concetti matematici di base e operare con essi per porre e risolvere problemi relativi…alle sue applicazioni.
- Comprendere il ruolo che il linguaggio matematico ricopre in quanto strumento essenziale per descrivere, comunicare, formalizzare, dominare i campi del sapere scientifico e tecnologico;

PeCuP (Licei):

- Possedere gli strumenti matematici…fondamentali e necessari per la comprensione delle discipline scientifiche e per poter operare nel campo delle scienze applicate;

- Acquisire le conoscenze tecniche e tecnologiche indispensabili nella vita quotidiana e sperimentare l’uso di semplici strumenti tecnologici; conoscere le caratteristiche dei sistemi tecnici semplici e i tipi di operazioni da essi svolte.
- Collocare il pensiero matematico e scientifico nei grandi temi dello sviluppo della storia delle idee e della cultura, nella storia delle scoperte scientifiche e delle invenzioni tecnologiche.
- Avere familiarità con gli strumenti informatici per utilizzarli nelle attività di studio e approfondimento delle altre discipline;

Obiettivi Generali del processo Formativo:

- Promozione dell’interdisciplinarità L’abitudine a trasferire strumenti e schemi concettuali da un contesto disciplinare ad un altro, la scoperta del carattere fortemente generativo del punto di vista extradisciplinare, il riconoscimento della complessità dei metodi e dei concetti che danno senso alla realtà e alla vita individuale e sociale diventano quindi una costante dell’intenzionalità formativa.
- Avvaloramento della storicità …I contenuti e i metodi di ogni disciplina si arricchiscono di senso e di motivazione quando sono posti all’interno di uno sfondo storico e sociale…

Prerequisiti

I discenti devono conoscere e saper applicare le principali proprietà riguardanti nozioni fondamentali dell’analisi, ovvero sono conoscenze pregresse:

- Concetto di limiti e principali proprietà ;
- Concetto di derivate e principali proprietà;
- Concetto di integrali indefiniti e principali proprietà;
- Abilità nel calcolo di integrali indefiniti immediati o facilmente riconducibili ad essi
- Concetto di successione e principali proprietà;
- Concetto di misura;
- Nozioni principali della teoria degli errori;
- Conoscenza del concetto di area e volume di una superficie.

Obiettivi

- Comprendere l’importanza e il significato geometrico di integrale;
- Acquisire conoscenza e padronanza dell’uso della terminologia utilizzata;
- Conoscere le principali proprietà;
- Conoscere ed applicare i teoremi proposti;
- Calcolare aree di superfici a contorno curvilineo e volumi di solidi di rotazione;
- Applicare le conoscenze acquisite in altri ambiti disciplinari;

- Utilizzare consapevolmente strumenti informatici.

Contenuti

- Utilizzare consapevolmente strumenti informatici;
- Introduzione all'integrazione definita: calcolo dell'area del rettangoloide;
- Definizione di integrale definito;
- Proprietà dell'integrale definito;
- Teorema della media o del valor medio;
- La funzione integrale;
- Teorema fondamentale del calcolo integrale (Teorema di Torricelli-Barrow);
- Formula fondamentale del calcolo integrale;
- Area tra due o più curve;
- Superficie e volume di un solido di rotazione;
- Lunghezza di un arco di curva;
- Applicazioni fisiche (Calcolo della legge oraria in un moto, Lavoro di una forza, Energia di un condensatore, Energia di un campo magnetico);
- Integrali di funzioni continue a tratti;
- Integrali impropri del 1° e del 2° tipo.

Strumenti didattici e risorse tecnologiche

- Manuale disciplinari in uso;
- Schede operative con esercizi mirati per favorire l'approfondimento e il recupero;
- Schede strutturate con svolgimento annesso;
- Lavagna;
- Quaderno;
- Computer;
- Gessi colorati;
- Mappe concettuali.

Metodi e tecniche di insegnamento

Nell'introdurre il concetto di integrale definito, al fine di trovare il giusto modo per coinvolgere i discenti proporrei una lezione frontale. Dapprima esporrei che la necessità di studiare il concetto di integrale definito si ritrova nel voler valutare l'area di una superficie piana limitata da un contorno curvilineo.

Per suscitare in loro curiosità e cogliere l'attenzione proietterei sulla lavagna quadrettata una figura curvilinea che dopo averla definita come *trapezoide* proporrei loro di calcolarne l'area.

Dopo aver ascoltato le varie supposizioni che i discenti proporranno lavorando anche in gruppo, si farà ricordare loro che misurare una grandezza vuol dire confrontarla con un'altra omogenea, fissata come unità di misura, in modo da poter stabilire quante volte quest'ultima è contenuta in quella da misurare. A tal punto ad ogni discente sarà fornito un foglio quadrettato sul quale è già stampato il trapezoide e si inviteranno i discenti a contare il numero di quadretti presenti all'interno della figura.

Durante il calcolo dell'area del trapezoide mi aspetterò che qualche discente mi chieda come si possono "contare" i quadretti che sono tagliati dal lato curvilineo, da qualche altro mi aspetto che mi venga chiesto quanto influisce la grandezza del quadretto sulla "reale" misura del trapezoide. Si calcolerà l'area (più grande) che tiene conto dei quadretti esterni alla curva e quella (più piccola) che comprende solo i quadretti strettamente inclusi nella figura.

In questo modo si avrà una misura per eccesso e una per difetto e pertanto si proporrà di calcolarne l'errore assoluto e l'errore relativo.

Inoltre utilizzando un foglio con quadrettatura più fitta si ripeterà lo stesso procedimento di misurazione dell'area della stesso trapezoide per far notare ai discenti che l'errore relativo andrà via via diminuendo, per cui i due valori ottenuti "tenderanno" ad approssimare sempre meglio il valore reale della superficie.

La metodologia impiegata utilizzata per svolgere l'intera unità didattica si può così sintetizzare:

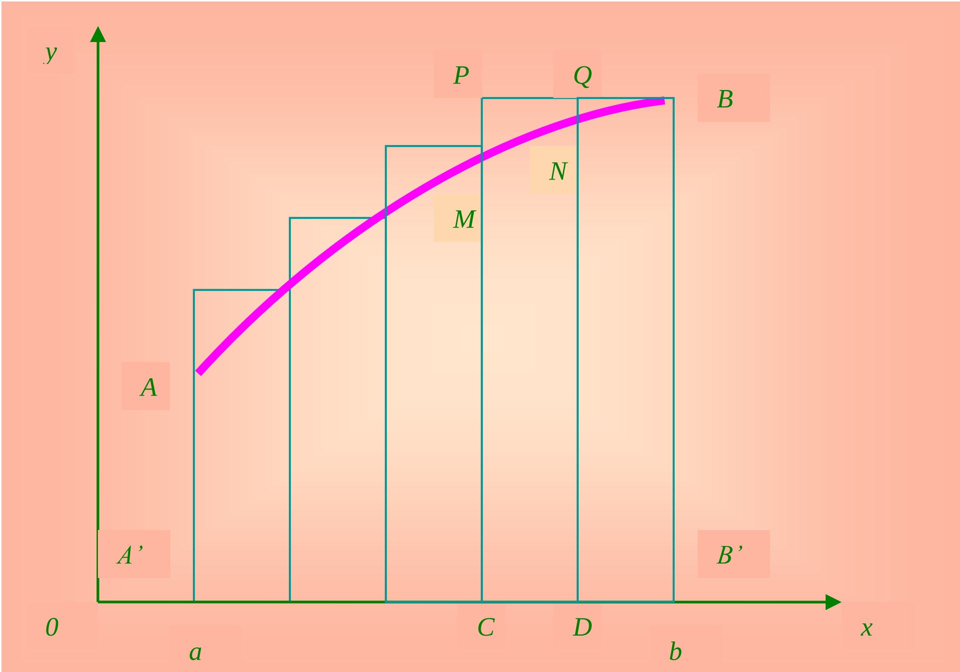
- Lezione frontale per affrontare in modo rigoroso e puntuale gli argomenti;
- Lavoro di gruppo e uso del tutoraggio;
- Problem solving;
- Lezione "partecipata" per stimolare tra gli alunni l'attività di ricerca dei concetti riguardanti il linguaggio algebrico e il calcolo letterale;
- Esercitazione in classe;
- Interventi didattici che favoriscono il recupero in itinere;
- Utilizzo di strumenti informatici (come Derive e Cabrì II Plus) utilizzabili per la risoluzioni di esercizi relativi al calcolo dell'integrale definito.

<u>Approccio al concetto di integrale definito</u>

A tal punto è possibile passare alla formalizzazione del concetto di integrale definito utilizzando le nozioni di successioni e di limite (prerequisiti fondamentali per lo studio di tale argomento).

Si generalizza l'esperienza svolta in aula e la si applica ad una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua definita sull'intervallo $I = [a, b]$ chiuso e limitato.

Si considera il caso in cui la funzione sia positiva e crescente nell'intervallo considerato; il diagramma della funzione sarà allora un arco di curva AB sopra l'asse x. Ci proponiamo di valutare la misura dell'area del trapezio mistilineo *AA'BB'* (**trapezoide**) limitato dell'arco *AB*, dalle rette di equazione $x = a$ e $x = b$ e dall'asse *x*.



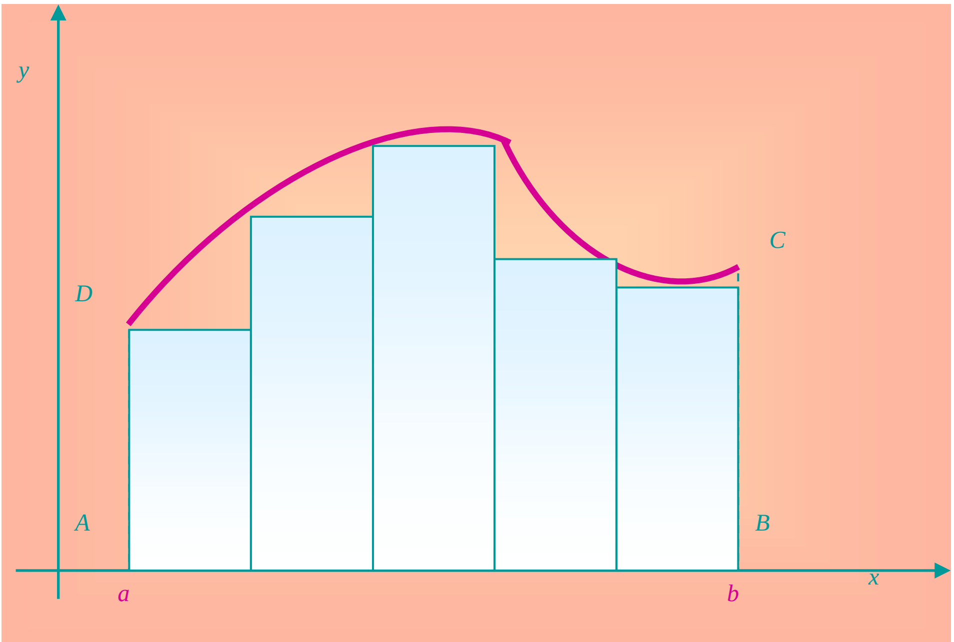
Per determinare l'area in oggetto, dividiamo l'intervallo [*a*, *b*] in un certo numero *n* di parti uguali di ampiezza Δx, e dai punti di suddivisione conduciamo le parallele all'asse *x* fino ad incontrare l'arco *AB* in altri punti. Da questi punti conduciamo, infine delle parallele all'asse *x* in modo da formare dei rettangoli (come nella figura 1).

Il trapezoide resta in tal modo diviso in tanti trapezoidi parziali e sia *CDQM* qualunque di questi: la sua area è maggiore di quella del rettangolo *CDNM* e minore dell'area del rettangolo circoscritto *CDQP*, cosicché la misura *S* dell'area di tutto il trapezoide è sempre compresa tra la misura s_n dell'area del *plurirettangolo inscritto* e la misura S_n dell'area del *plurirettangolo circoscritto.*

Consideriamo $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}$ i punti di suddivisione dell'intervallo [*a*, *b*] e poniamo $a = x_0$ e $b = x_n$.

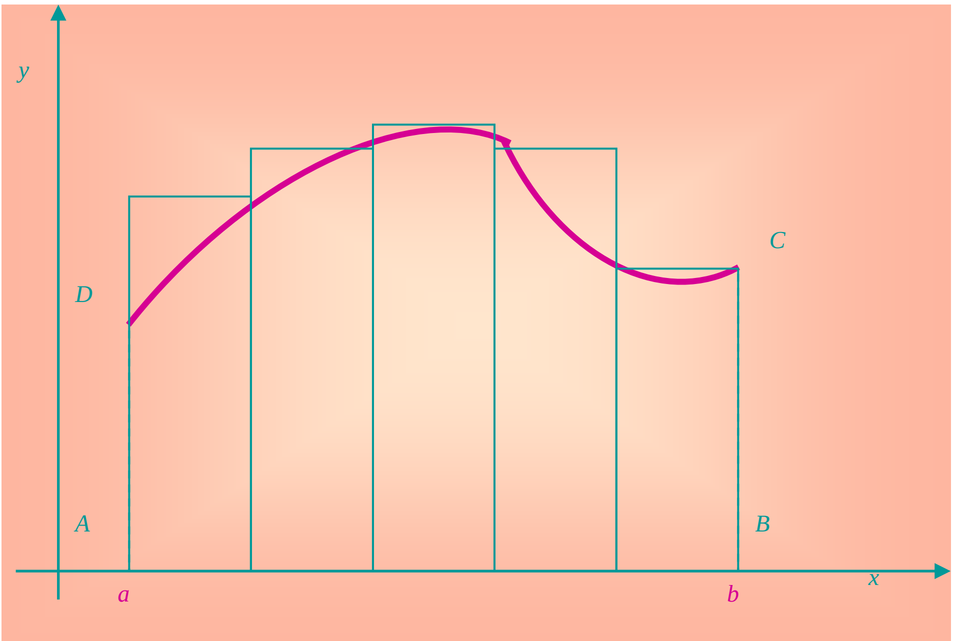
L'ampiezza dell'intervallo sarà $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ ed avremo

$$s_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ldots. + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x,$$



$s_n\,(D, f\,)$ si dice **somma inferiore**

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x\,.$$



$S_n\,(D, f\,)$ si dice **somma superiore**

Al variare di n le aree dei due plurirettangoli varieranno ed avranno perciò valori diversi di s_n e S_n; pertanto potremo considerare le due successioni numeriche:

$$s_1, s_2, ..., s_n, ...$$

$$S_1, S_2, ..., S_n, ...$$

relative alle suddivisioni dell'intervallo [a, b] in 1, 2, .., n, … parti uguali qualunque sia n, sarà sempre $s_n < S < S_n$;

Se facciamo crescere indefinitamente il numero n delle suddivisioni dell'intervallo [a, b] in modo che tenda a zero l'ampiezza di ciascun degli intervalli parziali, le due successioni tenendo allo stesso limite:

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = \lim_{x\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x .$$

Tale limite è un numero che si chiama **integrale definito** della funzione $f(x)$ relativa all'intervallo [a, b] e si denota con

$$\int_a^b f(x)dx$$

dove [a, b] si dice dominio di integrazione, f funzione integranda, a e b estremi dell'integrale, x variabile d'integrazione e dx indica la lunghezza del singolo intervallino, che tende a zero al tendere di n all'infinito.

<u>Osservazione</u>: *Sarà opportuno far osservare che l'integrale definito è un numero ben determinato e non una funzione.*

<u>Proprietà dell'integrale definito</u>

Per aumentare, ai fini del calcolo, la flessibilità della nozione di integrale è anche utile adottare le seguenti convenzioni:

- Se si calcola l'area di una figura in un punto, ovvero se gli estremi di integrazioni sono uguali:

$$\int_a^a f(x)dx = 0;$$

- Se si scambiano fra loro gli estremi a, b l'integrale definito cambia segno:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

Un'altra proprietà utile per il suo calcolo è

- <u>*Linearità rispetto alla funzione integranda*</u>: L'integrale del prodotto di una costante per una funzione integrabile in [a, b] è uguale al prodotto della costante per l'integrale della funzione:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Come per l'integrale indefinito, l'integrale definito della somma di due funzioni integrabili nello stesso intervallo [a, b] è uguale alla somma degli integrali:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx ;$$

- *<u>Additività rispetto agli intervalli</u>*: Siano *a*, *b*, *c* tre punti appartenenti ad un intervallo $[\alpha, \ \beta]$ in cui la funzione è integrabile; se $a<c<b$ si ha:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \, ;$$

- *<u>Confronto</u>*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Di seguito saranno trattati il teorema della media, la funzione integrale, il teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

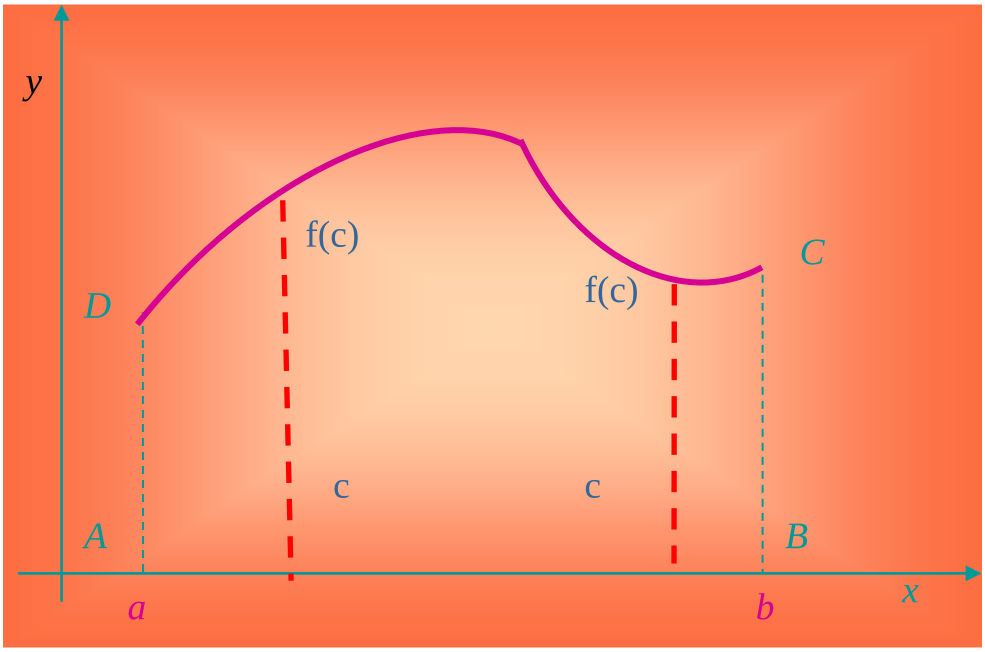
Teorema della media

Se la funzione *f* è continua nell'intervallo chiuso e limitato [*a*, *b*], allora esiste un punto *c* di tale intervallo per cui si ha:

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a) \cdot f(c)$$

o in forma equivalente

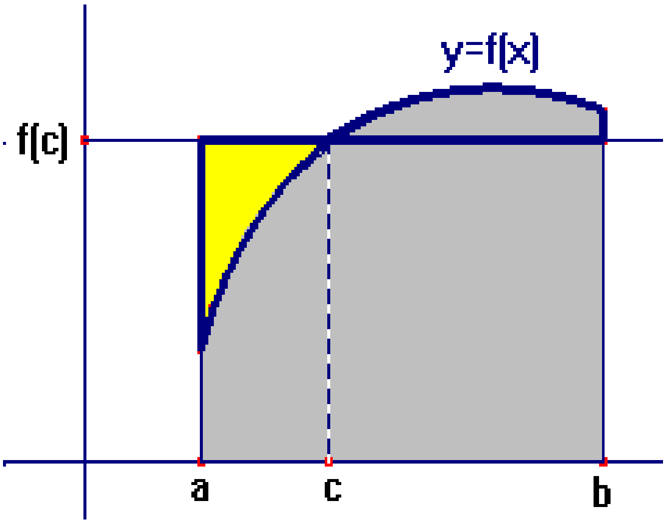
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx \, .$$



Giustificazione con l'intuizione geometrica

Presa una retta orizzontale, potremo sempre spostarla verso l'alto o verso il basso in modo da realizzare la situazione in cui l'area del rettangolo compreso fra la retta e l'asse *x*, sull'intervallo [a, b], sia perfettamente uguale all'area del trapezoide.

L'ordinata costante dei punti di tale retta dovrà evidentemente essere compresa fra il minimo assoluto e il massimo assoluto della funzione su [a, b], quindi la retta sarà obbligata a tagliare la curva continua in almeno un punto. L’ascissa di tale punto di intersezione retta-curva è l’ascissa *c* di cui il teorema afferma l’esistenza.



Dimostrazione

La funzione $f(x)$ per ipotesi continua sull’intervallo chiuso e limitato [*a*, *b*], è ivi dotata di minimo assoluto *m* e di massimo assoluto *M* (per il Teorema di Weierstrass).

Se ora noi prendiamo una qualsiasi “somma integrale inferiore”, avremo

$$s_n = m_1\Delta x + m_2\Delta x + \ldots + m_n\Delta x \geq m\Delta x + m\Delta x + \ldots + m\Delta x = m(\Delta x + \Delta x + \ldots + \Delta x) = m(b-a)$$

e analogamente, presa una qualsivoglia somma integrale superiore, avremo

$$S_n = M_1\Delta x + M_2\Delta x + \ldots + M_n\Delta x \leq M\Delta x + M\Delta x + \ldots + M\Delta x = M(\Delta x + \Delta x + \ldots + \Delta x) = M(b-a)$$

Poiché dunque per ogni *n* risulta

$$m(b-a) \leq s_n \leq S_n \leq M(b-a)$$

si avrà

$$m(b-a) \leq \lim_{n\to\infty} s_n \leq \lim_{n\to\infty} S_n \leq M(b-a)$$

ed essendo

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

sarà dunque

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

da cui

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$$

Esiste perciò (per il teorema dei valori intermedi o di Darboux) un'ascissa c, con $a < c < b$, tale che

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

quindi

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(c). \quad \text{(c.v.d.)}$$

Osservazione
L'ordinata

$$\boxed{f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = V_m}$$

viene chiamata "**valor medio**" della funzione $f(x)$ su [a, b].

Funzione Integrale

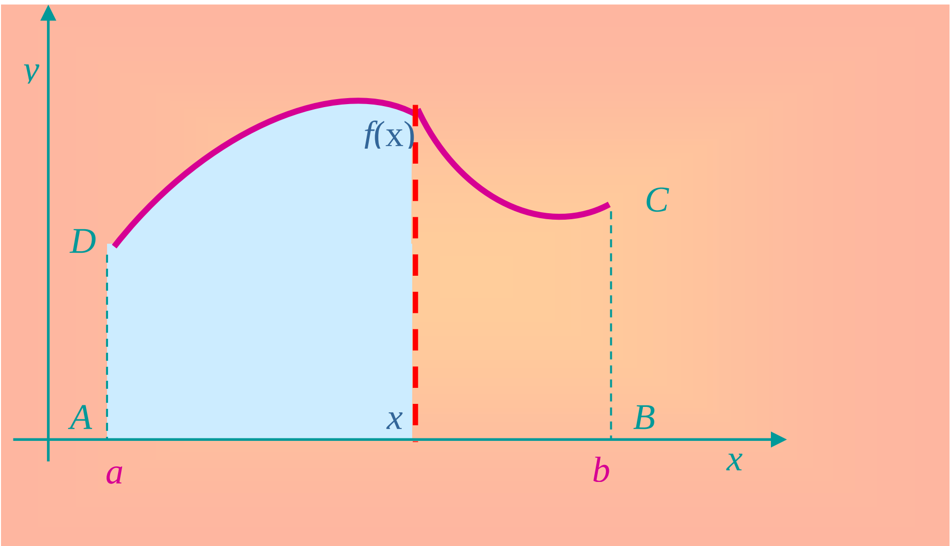
Consideriamo una funzione f continua nell'intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato e sia x un qualsiasi punto dell'intervallo considerato.

Si chiama **funzione integrale** della funzione f in $[a, b]$, la funzione così definita:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

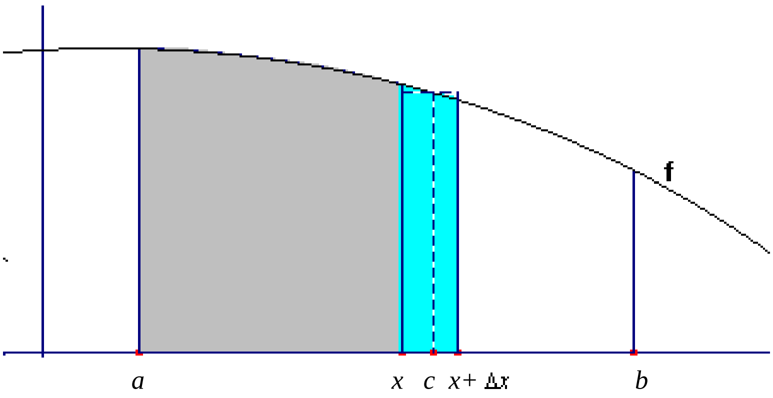
che associa ad ogni $x \in [a, b]$, il valore numerico $\int_a^x f(t)dt$.

La variabile indipendente per la funzione F è l'estremo superiore x dell'integrale definito dato dalla relazione precedente. La variabile t è detta variabile di integrazione.



Teorema Fondamentale del Calcolo (Torricelli-Barrow)

Sia f una funzione continua in un intervallo chiuso $[a, b]$, la corrispondente funzione integrale $F(x)$ è derivabile e per ogni $x \in [a, b]$: $F'(x) = f(x)$.



Dimostrazione

Consideriamo un'ascissa x fissata a piacere in $[a, b]$ e scriviamo il rapporto incrementale Δx della funzione F nel punto x. Avremo:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = f(c)$$

dove l'ultimo passaggio è un'applicazione del Teorema della Media sull'intervallo $[x, x+\Delta x]$: c è l'ascissa di cui questo teorema assicura l'esistenza.

Il punto c dipende da Δx, ossia è $c = c(\Delta x)$ e si ha che $x < c < x + \Delta x$.

Ora faremo tendere Δx a zero; ma quando Δx tende a zero, l'ascissa c, essendo "stretta" fra x (fissato) e $x + \Delta x$, tenderà a x e avremo:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{c \to x} f(c) \overset{NOTA}{=} f(x). \quad \text{(c.v.d.)}$$

NOTA: quest'ultimo passaggio dipende strettamente dalla ipotesi di continuità per la $f(x)$.

Osservazione

Nella dimostrazione, per rendere il ragionamento più spontaneo e anche per ragioni di praticità nell'esposizione, abbiamo supposto positivo l'incremento Δx. E' chiaro che il tutto si potrebbe riformulare per un Δx di segno qualsiasi.

Formula Fondamentale del Calcolo

Se f è continua in $[a, b]$ e se F è una qualunque primitiva di f, allora:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Tali teoremi ci permettono di affermare che:

- Ogni funzione continua ammette una primitiva;

- Per valutare l'integrale definito di una funzione continua è necessario trovare una sua primitiva e valutarla agli estremi dell'intervallo.

Cenni storici sull'integrale

(http://it.wikipedia.org/wiki/Integrale)

L'idea di base del concetto di integrale si trova già in Archimede di Siracusa, vissuto tra il 287 ed il 212 a.C, in parte nel metodo da lui usato per il calcolo dell'area del cerchio o del segmento di parabola detto metodo di esaustione e più precisamente nel calcolo dell'area della superficie racchiusa dal primo giro della spirale (che Archimede stima dall'alto e dal basso con un caso particolare di quelle che saranno dette "somme di Riemann"). Nel XVII secolo, vari matematici trovarono altri metodi ingegnosi per calcolare l'area sottesa al grafico di semplici funzioni, ad esempio: $x^{\alpha}(\alpha > -1)$ (Fermat 1636), $\frac{1}{x}$ (Nicolaus Mercator, 1668). Tutto ciò prima che Newton, Leibniz, Johann Bernoulli scoprissero indipendentemente il teorema fondamentale del calcolo integrale che ricondusse tale problema alla ricerca di una primitiva o antiderivata di una funzione.La definizione di integrale per le funzioni continue in tutto un intervallo, introdotta da Pietro Mengoli ed espressa con maggiore rigore da Cauchy, venne posta su base diversa da Riemann in modo da evitare il concetto di limite e da comprendere più estese classi di funzioni. Ma nel 1875 Gaston Darboux mostrò con un suo celebre teorema che la definizione di Riemann può essere enunciata in maniera del tutto simile a quella di Cauchy, purché si intenda il concetto di limite in modo un po' più generale. Per questo motivo si parla di integrale di Cauchy-Riemann. Tale maggior generalità servì di spunto a Mauro Picone nel 1923 per la definizione del limite d'una variabile detta ordinata.

Applicazioni del calcolo integrale all'informatica

Con *Derive* e *Cabrì-II Plus* al di là di svolgere in maniera immediata il calcolo di integrale definiti e di plottare i relativi grafici farò svolgere esercizi che rendono ancora più interessante lo studio dell'U.D. in esame proponendo esercizi un po' più impegnativi come ad esempio l'esercizio seguente.

Esercizio *Calcolare l'area della regione di piana delimitata dalle due curve di equazione* $f(x) = x^3$ *e* $g(x) = \ln(x+1)$ *nell'intervallo delimitato dai due punti di intersezione fra le curve.*

Applicazioni del calcolo integrale alla fisica

Calcolo della legge oraria in un moto

Quando un punto materiale si muove su una traiettoria con velocità variabile nel tempo $v = v(t)$ si può calcolare lo spostamento Δs subito dal mobile nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ mediante la relazione:

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt .$$

Ma la velocità istantanea è la derivata della funzione spazio percorso ovvero $s'(t) = v(t)$; perciò essendo $s(t)$ una primitiva di $v(t)$, per la formula fondamentale del calcolo integrale; si ha:

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$$

Analogamente se l'accelerazione varia nel tempo in modo noto, cioè $a = a(t)$, si può calcolare mediante la variazione di velocità Δv subita dal mobile nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$:

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt .$$

In modo del tutto analogo al precedente si giustifica tale relazione.

Lavoro di una forza

Consideriamo una forza F avente direzione e verso costanti e intensità che varia al variare del suo punto di applicazione. Assumendo la direzione della forza come asse delle ascisse e supponendo che l'intensità di F, in un punto di ascissa x, sia $F = f(x)$, il lavoro di F, relativo allo spostamento, lungo l'asse delle x, del suo punto di applicazione dal punto A di ascissa x_A al punto B di ascissa x_B, si calcola mediante la relazione:

$$L = \int_{x_A}^{x_B} F dx = \int_{x_A}^{x_B} f(x)dx .$$

In particolare si può valutare il caso di un *oscillatore armonico*, soggetto ad una forza elastica $F = -kx$, che compie delle oscillazioni attorno alla posizione di riposo O, origine del sistema di riferimento O_x. Calcoliamo il lavoro speso dalla forza F quando l'oscillatore passa dalla posizione A alla posizione B:

$$L = \int_{x_A}^{x_B} F dx = -\int_{x_A}^{x_B} kx dx = \left| -\frac{kx^2}{2} \right|_{x_A}^{x_B} = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 .$$

Energia di un condensatore

Calcoliamo il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrico nella scarica di un condensatore.

Supponiamo che, ad un certo istante, sulle armature di un condensatore si trovi la carica q e che tra le armature sussista quindi una differenza di potenziale $V = \frac{q}{c}$, dove c è la capacità del condensatore; se durante la scarica si ha lo spostamento di una carica infinitesima dq da una armatura del condensatore all'altra, il campo compie il lavoro elementare

$$dL = Vdq = \frac{q}{c}dq\,.$$

Il lavoro complessivamente speso per far perdere la carica iniziale Q posta sulle armature è:

$$L = \int_0^Q \frac{q}{c}dq = \frac{1}{c}\left|\frac{q^2}{2}\right|_0^Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{c}\,.$$

Energia di un campo magnetico

Quando un solenoide di induttanza L viene collegato ad un generatore di forza elettromotrice continua E, si genera nel circuito una forza elettromotrice autoindotta:

$$e = -L\frac{di}{dt}\,,$$

legata ad E ed alla resistenza del circuito dalla relazione:

$$E + e = Ri$$

dove i è l'intensità della corrente al generico istante t.

Sostituendo in quest'ultima relazione il valore della forza elettromotrice si ottiene:

$$E - L\frac{di}{dt} = Ri$$

da cui si ricava che:

$$E = L\frac{di}{dt} + Ri\,.$$

Se nel circuito fluisce la carica elementare $dq = idt$, l'energia fornita dal generatore è :

$$Edq = Lidi + Ri^2dt$$

dove Ri^2dt rappresenta l'energia che si trasforma in calore ne conduttore, mentre il termine $Lidi$ rappresenta l'energia che si accumula nel campo magnetico concatenato con il conduttore. Se l'intensità della corrente varia da 0 a i_0, l'energia accumulata nel campo è:

$$W = \int_0^{i_0} Lidi = L\left|\frac{i^2}{2}\right|_0^{i_0} = \frac{1}{2}Li_0^2\,.$$

Prove di verifica e criteri di valutazione

Controllo degli apprendimenti

Durante lo svolgimento lo svolgimento dell'U.D. ogni fase di lavoro potrà fornire elementi di accertamento e valutazione: l'esecuzione di lavori a casa, l'osservazione diretta degli alunni durante le esercitazioni e l'attività di laboratorio. Ciò consentirà di valutare gli alunni che stanno incontrando delle difficoltà e di intervenire, quanto è il caso con attività mirate.

Per quanto riguarda le verifiche si utilizzeranno le seguenti tipologie:

- Le *verifiche scritte* potranno essere articolate sotto forma di esercizi di tipo tradizionale oppure nella forma di prove strutturate: saranno almeno tre per quadrimestre.

Tale tipo di verifica consente di accertare

- le conoscenze,
- la capacità di applicare correttamente procedimenti regole apprese,
- la capacità di impostare e risolvere problemi.

Le verifiche saranno peraltro strutturate in modo tale da consentire agli allievi meno dotati di conseguire valutazioni sufficienti (mediante la verifica degli obiettivi minimi).

- Le *verifiche orali* si svolgeranno perlopiù alla lavagna e consentiranno di accertare oltre alla conoscenza dei contenuti teorici specifici dell'U.D. l'uso di un linguaggio specifico, capacità di sintesi e di esporre in modo logico e corretto i concetti matematici, la capacità di impostare la risoluzione dei problemi relativi agli argomenti già noti e di risolvere situazioni problematiche più complesse. Durante le interrogazioni si cercherà di sollecitare l'interesse della classe promuovendo discussioni interattive, dalle quali potranno scaturire proficue occasioni di chiarimento e confronto per tutti gli alunni.
- Sono previste *verifiche formative* per saggiare in tempi brevi il livello di acquisizione dei contenuti e avere indicazioni sul modo di procedere nel lavoro scolastico così da poter intervenire con adeguati mezzi di recupero. Verranno utilizzate diverse forme di verifica (test a scelta multipla, test del tipo vero /falso, i test di completamento) perché ogni prova può aver particolare effetti di applicazione o inibizione nei confronti degli studenti;
- *Schede e/o relazioni degli esperimenti* eseguiti per valutare le attività laboratoriali. In particolare nell'attività di laboratorio si può valutare:
  1. La capacità di gestire le conoscenze acquisite;
  2. Schede/relazioni delle osservazioni compiute in laboratorio.
- *Schede e/o esercizi* inerenti alle lezioni tenute nel laboratorio di informatica. In particolare nell'attività di laboratorio si può valutare:

1. La padronanza degli strumenti informatici;

2. La capacità di applicare le nozioni matematiche acquisite.

Il tempo a disposizione per svolgere la verifica è di 2 ore.

Valutazione della verifica sommativa

Il punteggio massimo del test è 40, il voto finale di ogni studente lo normalizzo dividendo per 4. Analizzando l'intera situazione della classe si può stabilire se ritornare sull'argomento oppure procedere verso una ulteriore unità d'apprendimento.

$$Voto\ \ finale = \frac{punteggio\, totale - punteggio\, ottenuto}{4}$$

Griglia di valutazione	
VOTO FINALE	**VALORE**
1 -3	***Gravemente Insufficiente***
4	***Insufficiente***
5	***Mediocre***
6	***Sufficiente***
7	***Discreto***
8	***Buono***
9-10	***Ottimo***

Attività di recupero/Rinforzo/Approfondimento

Le attività di recupero "hanno lo scopo fondamentale di prevenire l'insuccesso scolastico" e le scuole hanno l'obbligo di realizzarle, in ogni periodo dell'anno scolastico.

Le nuove disposizioni di legge in merito alle modalità di attribuzione del credito scolastico e di recupero dei debiti nei corsi di istruzione secondaria superiore assegnano alle istituzioni scolastiche autonome il compito di provvedere alla predisposizione di strumenti per il recupero dei debiti formativi agli studenti, anche attraverso la possibilità di "individuare anche modalità diverse ed innovative di attività di recupero, che prevedano collaborazioni esterne, al fine di garantire nelle scelte la centralità dei bisogni formativi dello studente".

È risaputo che dall'introduzione dei debiti formativi la percentuale di studenti che, avendo contratto un debito, lo estinguono nell'anno successivo è andata abbassandosi con il passare degli anni, arrivando a dati molto preoccupanti.

Si è diffuso l'atteggiamento, da parte degli studenti e delle famiglie degli stessi, di una pacifica convivenza con i propri "debiti", come un'accettazione dei propri limiti.

Il numero crescente di debiti, e in particolare in matematica, dovrebbe far riflettere ogni insegnante sul proprio modo di dialogare e proporre tale sapere agli allievi. Si dovrebbero organizzare corsi di recupero pomeridiani e programmare lavori di gruppo affiancando a chi manifesta tentennamenti o difficoltà chi ha ben assimilato l'argomento.

I corsi di recupero devono essere un'occasione in più, una seconda possibilità per "capire", per crescere.

Nelle attività di recupero/approfondimento sarebbe opportuno utilizzare:

- *Dispense, testi alternativi , utilizzo di Internet* per dare indicazioni su particolari siti in rete che trattano l'argomento trattato;
- *Sportelli di sostegno didattico* per favorire in maniera veloce chiarimenti sulle nozioni che evidentemente non sono state assimilate correttamente;
- *Discussioni guidata dall'insegnante* per eliminare dubbi e perplessità che potrebbero nasce durante una spiegazione o semplicemente durante lo svolgimento degli esercizi.

Verifica formativa

Alunno/a   Cognome ____________________   Nome__________________________Classe III _______

A	**Calcolare i seguenti integrali definiti**
1	$$\int_0^1 \frac{x^2-2x+5}{\left(x^2+1\right)^2}dx$$
2	$$\int_1^e \frac{1}{x(3+\log x)^2}dx$$
3	$$\int_0^{16} \frac{1}{x+\sqrt{x}+2}dx$$
4	$$\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}dx$$
5	$$\int_0^{\pi/2} \left(sen^2x+\cos x\right)dx$$
6	$$\int_{-1}^{1} xe^{\left(x^2-1\right)}dx$$
7	$$\int_1^2 \sqrt{9-x^2}\,dx$$
8	$$\int_0^1 e^x \sin x dx$$
9	$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$$
B	**Calcolare l'area delimitata dal grafico della funzione**
10	$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x2^x}{\lvert x\rvert}, & per\ \ x\neq 0 \\ 0, & per\ \ x=0 \end{cases}$$ **e dall'asse della *x*, per *x*** $\in[1,4]$. $x\in[-1,2]$

Buon lavoro!

Verifica sommativa

Alunno/a   Cognome ____________________   Nome__________________________Classe III ______

1	**Calcolare il seguente integrale definito:** $$\int_0^{\pi} x^2 \cdot \mathrm{sen}\, x\; dx$$ *Svolgimento* Calcoliamo, per parti, l'integrale indefinito: $$\int x^2 \cdot \mathrm{sen}\, x\, dx = x^2 \cdot (-\cos x) - \int 2x \cdot (-\cos x)\, dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cdot \cos x\, dx$$ applicando ancora la regola di integrazione per parti si trova: $$\int x \cdot \cos x\, dx = x \cdot \mathrm{sen}\, x - \int \mathrm{sen}\, x\, dx = x\,\mathrm{sen}\, x + \cos x + C$$ e quindi: $\int x^2 \cdot \mathrm{sen}\, x\, dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cdot \cos x\, dx = -x^2 \cos x + 2x\,\mathrm{sen}\, x + 2\cos x + C$. Si ha allora: $$\int_0^{\pi} x^2 \cdot \mathrm{sen}\, x\, dx = -x^2 \cos x + 2\,\mathrm{sen}\, x + 2\cos x\Big\|_0^{\pi} =$$ $$= -\pi^2 \cos\pi + 2\,\mathrm{sen}\,\pi + 2\cos\pi + 0\cos 0 - 2\,\mathrm{sen}\, 0 - 2\cos 0 = \pi^2 - 2 - 2 = \pi^2 - 4$$ *(Lo svolgimento corretto dell'esercizio vale 6 punti)*
2	**Calcolare il seguente integrale definito:** $$\int_1^2 \frac{2x+3}{x^2+3x-2} dx$$ *Svolgimento* La funzione al denominatore è una funzione razionale di secondo grado. Poiché la funzione al numeratore è proprio la derivata prima di quella al denominatore, questo integrale può venire calcolato molto semplicemente applicando il metodo di sostituzione. Poniamo $t = x^2 + 3x - 2$ e quindi $dt = (2x+3)\, dx$, si ottiene: $$\int_1^2 \frac{2x+3}{x^2+3x-2} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \log\|t\|\Big\|_1^2 = \log\|x^2+3x-2\|\Big\|_1^2 = \log 6$$ *(Lo svolgimento corretto dell'esercizio vale 4 punti)*
3	**Calcolare il seguente integrale definito:** $$\int_0^1 x \cdot e^{2x}\, dx$$

Svolgimento

Calcoliamo l'integrale indefinito per trovare una primitiva della funzione integranda. Risolvendo per parti si trova:

$$\int x\cdot e^{2x}\,dx = x\cdot\frac{e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = x\cdot\frac{e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}}{2}+C=\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}+C\,.$$

Quindi:

$$\int_0^1 x\cdot e^{2x}\,dx=\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}\Big|_0^1=\frac{1}{4}(2-1)e^2-\frac{1}{4}(-1)e^0=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}.$$

(Lo svolgimento corretto dell'esercizio vale 5 punti)

4

Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_1^2 -\frac{\log x}{x^2}\,dx$$

Svolgimento

Calcoliamo l'integrale indefinito:

$$\int -\frac{\log x}{x^2}\,dx=\int -\frac{1}{x^2}\cdot\log x\,dx$$

poiché $-\frac{1}{x^2}$ è la derivata di $\frac{1}{x}$, risolvendo per parti si trova:

$$\int -\frac{1}{x^2}\cdot\log x\,dx=\frac{1}{x}\cdot\log x-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{x}\cdot\log x+\int -\frac{1}{x^2}\,dx=\frac{1}{x}\cdot\log x+\frac{1}{x}+C\,.$$

L'integrale definito è allora:

$$\int_1^2 -\frac{\log x}{x^2}\,dx=\frac{1+\log x}{x}\Big|_1^2=\frac{1+\log 2}{2}-\frac{1+\log 1}{1}=\frac{1}{2}+\frac{\log 2}{2}-1=\frac{\log 2}{2}-\frac{1}{2}\,.$$

(Lo svolgimento corretto dell'esercizio vale 5 punti)

5

Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_{1-\frac{\pi}{2}}^{1}\mathrm{sen}(1-x)\,dx$$

Svolgimento

Per calcolare questo integrale dobbiamo innanzitutto trovare una primitiva della funzione sen(1–*x*); calcolando l'integrale indefinito

$$\int \mathrm{sen}(1-x)\,dx=\int -\mathrm{sen}t\,dt=\cos t+C=\cos(1-x)+C$$

individuiamo l'insieme delle primitive della funzione. Basta scegliere una di queste primitive, sia ad esempio $G(x)=\cos(1-x)$, ed è allora:

	$$\int_{1-\frac{\pi}{2}}^{1} \operatorname{sen}(1-x)\,dx = G(1) - G\left(1-\frac{\pi}{2}\right) = \cos(1-1) - \cos\left(1-1+\frac{\pi}{2}\right) = 1-0=1.$$ Si noti che, nel seguito scriveremo in modo molto più compatto: $$\int_{1-\frac{\pi}{2}}^{1} \operatorname{sen}(1-x)\,dx = \cos(1-x)\Big|_{1-\frac{\pi}{2}}^{1} = \cos(1-1) - \cos\left(1-1+\frac{\pi}{2}\right) = 1-0=1.$$ *(Lo svolgimento corretto dell'esercizio vale 6 punti)*

6	**Calcolare il seguente integrale definito:** $$\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-4}\,dx$$ *Svolgimento* Per la formula fondamentale del calcolo integrale, per risolvere l'integrale definito $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-4}\,dx$ si deve prima trovare una primitiva F(x) della funzione $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$. Per calcolare $\int \frac{x-1}{x^2-4}\,dx$ usiamo il metodo di decomposizione delle funzioni razionali in fratti semplici, ottenendo: $$\frac{x-1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{(A+B)x+2A-2B}{(x+2)(x-2)}.$$ Uguagliando i coefficienti dei due polinomi a numeratore, si ottiene il sistema: $$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-2B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=\frac{3}{4} \end{cases}$$ Dunque $$\int_0^1 \left(\frac{1/4}{x-2} + \frac{3/4}{x+2}\right)dx = \left[\frac{1}{4}\log\lvert x-2\rvert + \frac{3}{4}\log\lvert x+2\rvert\right]_0^1 = \frac{1}{4}\log 1 + \frac{3}{4}\log 3 - \frac{1}{4}\log 2 - \frac{3}{4}\log 2 =$$ $$\frac{3}{4}\log 3 - \log 2.$$ *(Lo svolgimento corretto dell'esercizio vale 5 punti)*

7	**Calcolare l'area delimitata dal grafico della funzione** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ **e dall'asse della *x*, per *x*** $\in [1,4]$.

	Svolgimento Per $x \in [1,4]$ la finzione *f*(*x*) è senz'altro positiva perchè somma di quantità positive. Dunque l'area *A* richiesta risulta essere: $A = \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int_1^4 \left(x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} + x^{-2} \right) dx =$ $= \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \log\lvert x\rvert + \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^4 = \left[2\sqrt{x} + \log\lvert x\rvert - \frac{1}{x} \right]_1^4 =$ $= 4 + \log 4 - \frac{1}{4} - 2 - \log 1 + 1 = \frac{11}{4} + \log 4 .$ *(Lo svolgimento corretto dell'esercizio vale 4 punti)*
8	**Calcolare l'area della regione piana *R* compresa tra il grafico della funzione** $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x}{6}, & per\ 0 \le x < \pi \\ \sin x, & per\ \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$ **dall'asse della *x*.** *Svolgimento* Tenendo conto che nell'intervallo $[0, \pi]$ la finzione *f*(*x*) è positiva mentre tra π e 2π *f*(*x*) è negativa l'area *A* della regione *R* richiesta risulta essere: $A = \int_0^\pi \frac{x^2+x}{6} dx - \int_\pi^{2\pi} \sin x dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^\pi - [-\cos x]_\pi^{2\pi} =$ $= \frac{1}{6}\left[\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^2}{2} \right] + [1+1] = \frac{\pi^3}{18} + \frac{\pi^2}{12} + 2 .$ *(Lo svolgimento corretto dell'esercizio vale 5 punti)*

Buon lavoro!

A cura di prof.ssa Sabina Minniti

Redazione scuolaÈ